16 | 时间和空间复杂度（上）：优化性能是否只是“纸上谈兵”？

2019-01-18 黄申

程序员的数学基础课 进入课程 >

讲述：黄申
时长 14:35　大小 13.37M

你好，我是黄申。

作为程序员，你一定非常清楚复杂度分析对编码的重要性。计算机系统从最初的设计、开发到最终的部署，要经过很多的步骤，而影响系统性能的因素有很多。我把这些因素分为三大类：**算法理论上的计算复杂度**、**开发实现的方案**和**硬件设备的规格**。

如果将整个系统的构建比作生产汽车，那么计算复杂度相当于在蓝图设计阶段，对整个汽车的性能进行评估。如果我们能够进行准确的复杂度分析，那么就能从理论上预估汽车的各项指标，避免生产出一辆既耗油又开得很慢的汽车。

可是，你也常常会发现，要准确地分析复杂度并不容易。这一讲，我来说说如何使用数学的思维，来进行系统性的复杂度分析。

基本概念

我先带你简短回顾一下几个重要概念，便于你稍后更好地理解本节的内容。

算法复杂度是一个比较抽象的概念，通常只是一个估计值，它用于衡量程序在运行时所需要的资源，用于比较不同算法的性能好坏。同一段代码处理不同的输入数据所消耗的资源也可能不同，所以分析复杂度时，需要考虑三种情况，最差情况、最好情况和平均情况。

复杂度分析会考虑性能的各个方面，不过我们最关注的是两个部分，时间和空间。时间因素是指程序执行的耗时多少，空间因素是程序占用内存或磁盘存储的多少。因此，我们把复杂度进一步细分为时间复杂度和空间复杂度。

我们通常所说的时间复杂度是指**渐进时间复杂度**，表示程序运行时间随着问题复杂度增加而变化的规律。同理，空间复杂度是指**渐进空间复杂度**，表示程序所需要的存储空间随着问题复杂度增加而变化的规律。我们可以使用大 O 来表示这两者。

我这里不会讲太多的基本概念，而是通过数学的思维，总结一些比较通用的方法和规则，帮助你快速、准确地进行复杂度分析。

6 个通用法则

复杂度分析有时看上去很难，其实呢，我们只要通过一定的方法进行系统性的分析，就能得找正确的结论。我通过自身的一些经验，总结了 6 个法则，相信它们对你会很有帮助。

1. 四则运算法则

对于时间复杂度，代码的添加，意味着计算机操作的增加，也就是时间复杂度的增加。如果代码是平行增加的，就是加法。如果是循环、嵌套或者函数的嵌套，那么就是乘法。

比如二分查找的代码中，第一步是对长度为 n 的数组排序，第二步是在这个已排序的数组中进行查找。这两个部分是平行的，所以计算时间复杂度时可以使用加法。第一步的时间复杂度是 O(nlogn)，第二步的时间复杂度是 O(logn)，所以时间复杂度是 O(nlogn)+O(logn)。

你还记得在第 3 讲我讲的查字典的例子吗？

```
String[] dictionary = {"i", "am", "one", "of", "the", "authors", "in", "geekbang"};

Arrays.sort(dictionary);  // 时间复杂度为 O(nlogn)

String wordToFind = "i";

boolean found = Lesson3_3.search(dictionary, wordToFind); // 时间复杂度 O(logn)
if (found) {
  System.out.println(String.format(" 找到了单词 %s", wordToFind));
} else {
  System.out.println(String.format(" 未能找到单词 %s", wordToFind));
}
```

这里面的 Arrays.sort(dictionary)，我用了 Java 自带的排序函数，时间复杂度为 O(nlogn)，而 Lesson3_3.search 是我自己实现的二分查找，时间复杂度为 O(logn)。两者是并行的，并依次执行，因此总的时间复杂度是两者相加。

我们再来看另外一个例子。从 n 个元素中选出 3 个元素的可重复排列，使用 3 层循环的嵌套，或者是 3 层递归嵌套，这里时间复杂度计算使用乘法。由于 $n*n*n=n^3$，时间复杂度是 $O(n^3)$。对应加法和乘法，分别是减法和除法。如果去掉平行的代码，就减掉相应的时间复杂度。如果去掉嵌套内的循环或函数，就除去相应的时间复杂度。

对于空间复杂度，同样如此。需要注意的是，空间复杂度看的是对内存空间的使用，而不是计算的次数。如果语句中没有新开辟空间，那么无论是平行增加还是嵌套增加代码，都不会增加空间复杂度。

2. 主次分明法则

这个法则主要是运用了数量级和运算法则优先级的概念。在刚刚介绍的第一个法则中，我们会对代码不同部分所产生的复杂度进行相加或相乘。使用加法或减法时，你可能会遇到不同数量级的复杂度。这个时候，我们只需要看最高数量级的，而忽略掉常量、系数和较低数量级的复杂度。

在介绍第一个法则的时候，我说了先排序、后二分查找的总时间复杂度是 O(nlogn) + O(logn)。实际上，我贴出的代码中还有数组初始化、变量赋值、Console 输出等步骤，如果细究的话，时间复杂度应该是 O(nlogn) + O(logn) + O(3)，但是和 O(nlogn) 相比，常量和 O(logn) 这种数量级都是可以忽略的，所以最终简化为 O(nlogn)。

再举个例子，我们首先通过随机函数生成一个长度为 n 的数组，然后生成这个数组的全排列。通过循环，生成 n 个随机数的时间复杂度为 O(n)，而全排列的时间复杂度为 O(n!)，如果使用四则运算法则，总的时间复杂为 O(n)+O(n!)。

不过，由于 n! 的数量级远远大于 n，所以我们可以把总时间复杂度简化为 O(n!)。这对于空间复杂度同样适用。假设我们计算一个长度为 n 的向量和一个维度为 [n*n] 的矩阵之乘积，那么总的空间复杂度可以由 (O(n)+O(n^2)) 简化为 O(n^2)。

注意，这个法则对于乘法或除法并不适用，因为乘法或除法会改变参与运算的复杂度的数量级。

3. 齐头并进法则

这个法则主要是运用了多元变量的概念，其核心思想是复杂度可能受到多个因素的影响。在这种情况下，我们要同时考虑所有因素，并在复杂度公式中体现出来。

我在之前的文章中，介绍了使用动态规划解决的编辑距离问题。从解决方案的推导和代码可以看出，这个问题涉及两个因素：参与比较的第一个字符串的长度 n 和第二个字符串的长度 m。代码使用了两次嵌套循环，第一层循环的长度是 n，第二层循环的长度为 m，根据乘法法则，时间复杂度为 O(n*m)。而空间复杂度，很容易从推导结果的状态转移表得出，也是 O(n*m)。

4. 排列组合法则

排列组合的思想不仅出现在数学模型的设计中，同样也会出现在复杂度分析中，它经常会用在最好、最坏和平均复杂度分析中。

我们来看个简单的算法题。

给定两个不同的字符 a 和 b，以及一个长度为 n 的字符数组。字符数组里的字符都只出现过一次，而且一定存在一个 a 和一个 b，请输出 a 和 b 之间的所有字符，包括 a 和 b。假设我们的算法是按照数组下标从低到高的顺序依次扫描数组，那么时间复杂度是多少呢？这里时间复杂度是由被扫描的数组元素之数量决定的，但是要准确的求解并不容易。仔细思考一下，你会发现被扫描的元素之数量存在很多可能的值。

首先，考虑字母出现的顺序，第一个遇到的字母有 2 个选择，a 或者 b。而第二个字母只有 1 个选择，这就是 2 个元素的全排列。下面我们把两种情况分开来看.

第一种情况是 a 在 b 之前出现。接下来是 a 和 b 之间的距离，这会决定我们要扫描多少个字符。两者之间的距离最大为 n-1，最小为 1，所以最坏的时间复杂度为 O(n-1)，根据主次分明法则，简化为 O(n)，最好复杂度为 O(1)。

平均复杂度的计算稍微繁琐一些。如果距离为 n-1，只有 1 种可能，a 为数组中第一个字符，b 为数组中最后一个字符。如果距离为 n-2，那么 a 字符的位置有 2 种可能，b 在 a 位置确定的情况下只有 1 种可能，因此排列数是 2。以此类推，如果距离为 n-3，那么有 3 种可能，一直到距离 1，有 n-1 种可能。所以平均的扫描次数为 (1 *(n-1) + 2 *(n-2) + 3 (n -3) + ... + (n-1) 1) / (1 + 2 + ... + n)，最后时间复杂度简化为 O(n)。

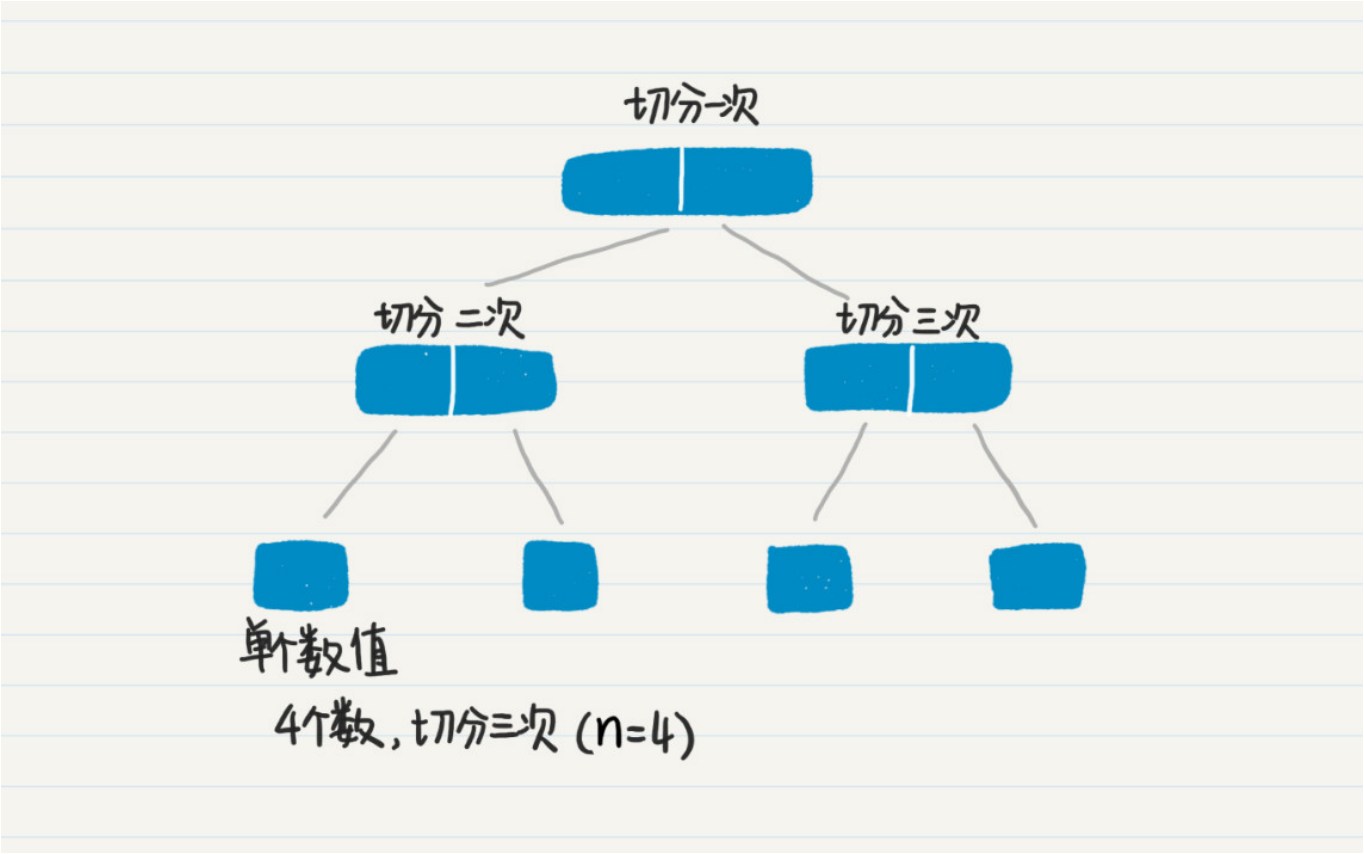
第二种情况是 b 在 a 之前出现。这个分析过程和第一种情况类似。我们假设第一种和第二种情况出现的几率相等，那么综合两种情况，可以得出平均复杂度为 O(n)。

5. 一图千言法则

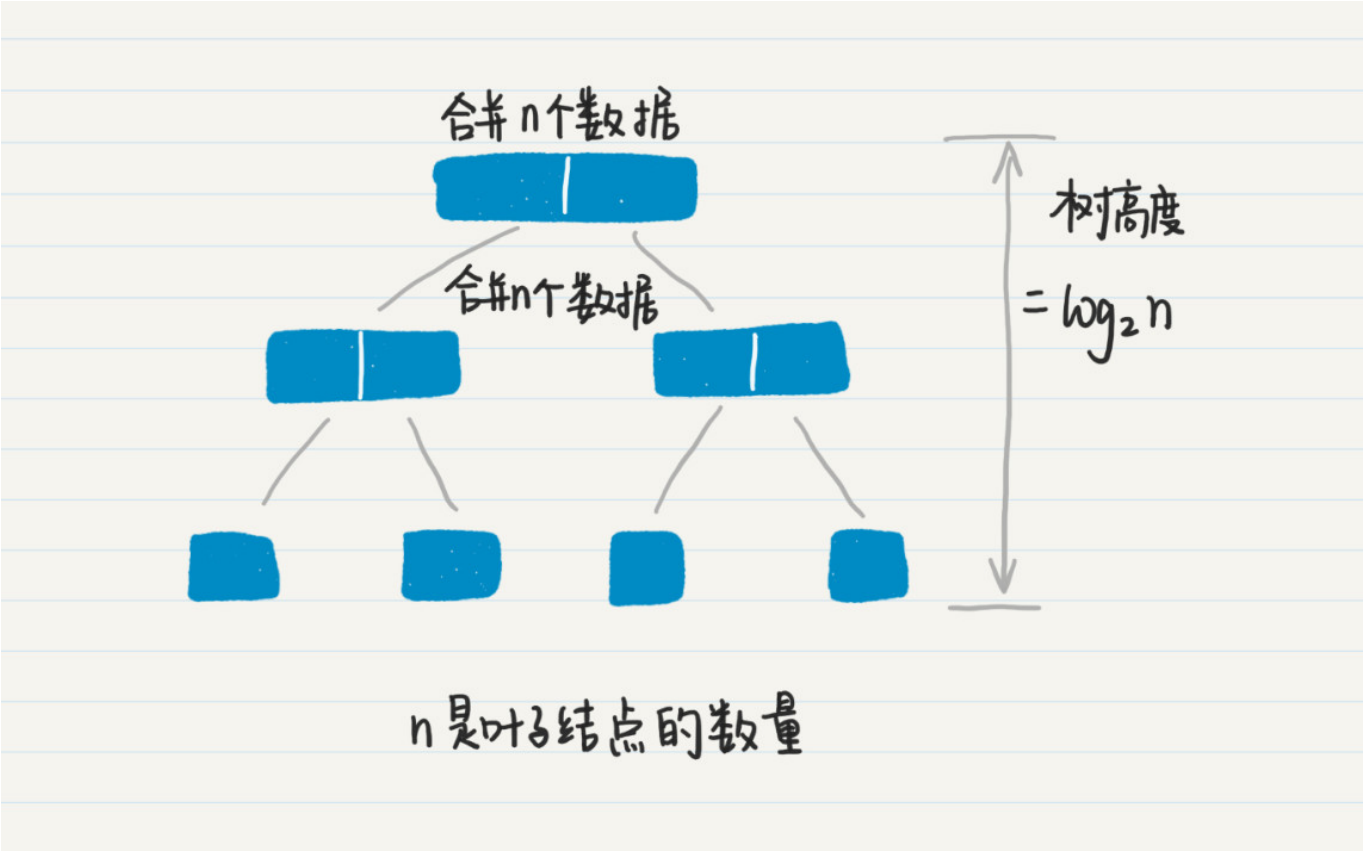
在之前的文章中，我提到了很多数学和算法思想都体现了树这种结构，通过画图它们内在的联系就一目了然了。同样，这些树结构也可以帮助我们分析某些算法的复杂度。

就以我们之前介绍的归并排序为例。这个算法分为数据的切分和归并两大阶段，每个阶段的数据划分不同，分组数量也不同，感觉上时间复杂度不太好计算。下面我们来看一个例子，帮助你理解。

假设等待排序的数组长为 n。首先，看数据切分阶段。数据切分的次数，就是切分阶段那棵树的非叶子结点之数量。这个切分阶段的树是一棵满二叉树，叶子结点是 n 个，那么非叶子结点的数量就是 n-1 个，所以切分的次数也就是 n-1 次。如果我们切分数据的时候，并不重新生成新的数据，而只是生成切分边界的下标，那么时间复杂度就是 O(n-1)。

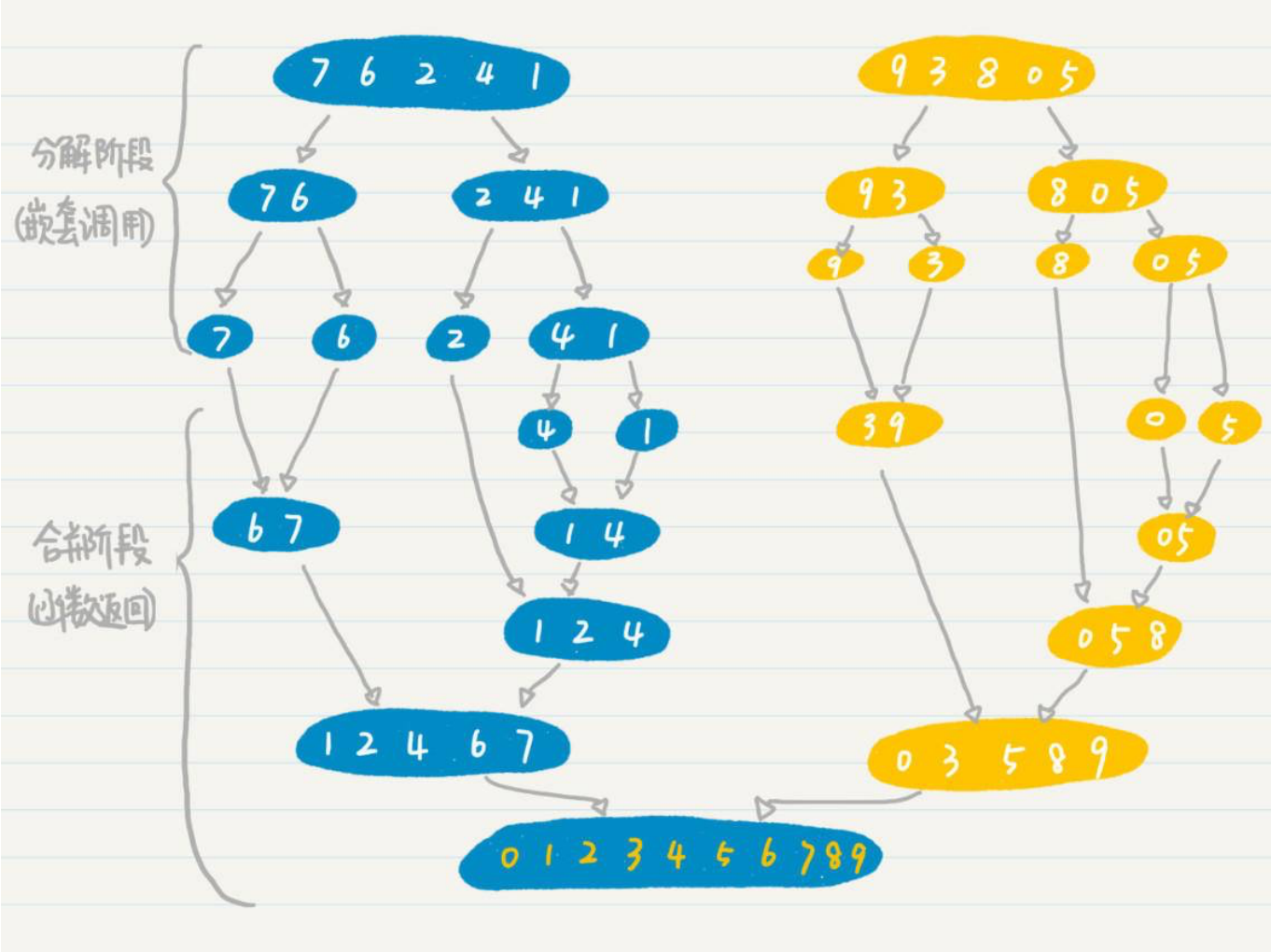


在数据归并阶段，我们看二叉树的高度，为 log_2n，因此归并的次数为 log_2n。另外，无论数组被细分成多少个小的部分，每次归并都需要扫描整个长度为 n 的数组，因此归并阶段的时间复杂度为 $nlog_2n$。



两个阶段加起来的时间复杂度为 O(n-1)+nlog$_2$n，最终简化为 nlogn。是不是很直观？

我再放出我们之前讲二分查找所用的图，你可以结合这个例子进一步理解。



当然，除了图论，很多简单的图表也能帮助到我们的分析。

例如，在使用动态规划法的时候，我们经常要画出状态转移的表格。看到这类表格，我们可以很容易地得出该算法的时间复杂度和空间复杂度。以编辑距离为例，参看下面这个示例的图表，我们可以发现每个单元格都对应了 3 次计算，以及一个存储单元，而总共的单元格数量为 m*n，m 为第一个字符串的长度，n 为第二个字符串的长度。所以，我们很快就能得出这种算法的时间复杂度为 O(3m*n)，简写为 O(m*n)，空间复杂度为 O(m*n)。

	空B	m	o	u	s	e
空A	0	1	2	3	4	5
m	1	min(2, 2, 0)=0	min(3, 1, 2)=1	min(4,2,3)=2	min(5,3,4)=3	min(6,4,5)=4
o	2	min(1, 3, 2)=1	min(2, 3, 0)=0	min(3,1,2)=1	min(4,2,3)=2	min(5,3,4)=3
u	3	min(2, 4, 3)=2	min(1, 3, 2)=1	min(2,2,0)=0	min(3,1,2)=1	min(4,2,3)=2
u	4	min(3, 5, 4)=3	min(2, 4, 3)=2	min(1,3,1)=1	min(2,2,1)=1	min(3,2,2)=2
s	5	min(4, 6, 5)=4	min(3, 5, 4)=3	min(2,4,3)=2	min(2,3,1)=1	min(3,2,2)=2
e	6	min(5, 7, 6)=5	min(4,6,5)=4	min(3,5,4)=3	min(2,4,3)=2	min(3,3,1)=1

6. 时空互换法则

在给定的计算量下，通常时间复杂度和空间复杂度呈现数学中的反比关系。这就说明，如果我们没法降低整体的计算量，那么也许可以通过增加空间复杂度来达到降低时间复杂度的目的，或者反之，通过增加时间复杂度来降低空间复杂度。

对于这个规则最直观的例子就是缓存系统。在没有缓存系统的时候，每次请求都要服务器来处理，因此时间复杂度比较高。如果使用了缓存系统，那么我们会消耗更多的内存空间，但是降低了请求相应的时间。

说到这，你也许会问，在使用广度优先策略优化聚合操作的时候，无论是时间还是空间复杂度，都大幅降低了啊？请注意，这里时空互换法则有个前提条件，就是计算量固定。而聚合操作的优化，是利用了广度优先的特点，大幅减少了整体的计算量，因此可以保证时间和空间复杂度都得到降低。

小结

时间复杂度和空间复杂度的概念，你一定不陌生。可是，在实际运用中，你可能就会发现复杂度分析并不是那么简单。这一节我通过个人的一些经验，从数学思维的角度出发，总结了几条常用的法则，对你会有所帮助。

这些总结可能还是过于抽象，下一讲中，我会通过几个案例分析，来讲讲如何使用这些法则。

思考题

请尝试使用本次介绍的规则，分析一下双向广度优先搜索的时间和空间复杂度。

欢迎在留言区交作业，并写下你今天的学习笔记。你可以点击“请朋友读”，把今天的内容分享给你的好友，和他一起精进。

上一篇　15 | 从树到图：如何让计算机学会看地图？

下一篇　17 | 时间和空间复杂度（下）：如何使用六个法则进行复杂度分析？

精选留言 (3)

写留言

Being
2019-01-19

4

老师，我想了很久，不能确定，双向BFS的停止条件跟maxDegrees有关，也就是说最坏的情况是刚好到maxDgrees时搜索到，所以时间复杂度应该是 maxDgrees * 2*（V+E），运用四则运算法则，这个队列循环了maxDgrees次，每一次对node的访问都是（V+E），而双向是两端并进所以乘2，再根据主次分明，将常量这些去掉，最后就是O（V）。
空间复杂度也和maxDegrees有关，队列有两个maxDegrees*（V+E），visited的容器...
展开

作者回复: 分析的很详细👍，这里E是指边的数量？V是指结点的数量？

pyhhou
2019-03-16

2

思考题感觉要根据具体图的情况来看具体时间复杂是多少，就之前的六度关系的例子，假设把关系看作是一个树，每个结点都有 n 个子结点，要确认两个人是几度好友，也就是确认两个结点相距多少层，如果是单向广度优先搜索，时间复杂度 O(n^degree)，双向可以运用加法法则，两边同时出发，时间复杂度 2 * O(n^(degree/2))，空间复杂度是队列中暂存的结点的最大值，和时间复杂度一样

展开

作者回复: 是的

Being
2019-01-20

嗯，V是节点的数量，E是边的数量，根据邻接矩阵的概念来的。

作者回复: 思路是对的，不过V和E我们通常可以使用平均连接数来进一步推导，便于比较不同算法的好坏。具体的我会在第17讲的例子中讲解。