第四章 矢量代数与空间解析几何

大纲要求

了解 两个向量垂直、平行的条件，曲面方程和空间曲线方程的概念，常用二次曲面的方程及其图形，空间曲线的参数方程和一般方程.空间曲线在坐标平面上的投影.

会 求平面与平面、平面与直线、 直线与直线之间的夹角，利用平面、直线的相互紊（平行、垂直、相交等）解决有关问题，点到直线以及点到平面的距离，求简单的柱面和旋转曲面的方程，求空间曲线在坐标平面上的投影方程.

理解 空间直角坐标系，向量的概念及其表示，单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，

掌握 向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），用坐标表达式进行向量运算的方法，平面方程和直线方程及其求法.

第一节 矢量代数

内容精要

（一） 基本概念

1.矢量的概念

定义 4.1 一个既有大小又有方向的量称为矢量，长度为 0 的矢量称为零矢量，用 0 表示，方向可任意确定。长度为 1 的矢量称为单位矢量。

定义 4.2 两个矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ ，若它们的方向一致，大小相等，则称这两个矢量相等，记作 $\vec{a}=\vec{b}$.换句话说一个矢量可按照我们的意愿把它平移到任何一个地方（因为既没有改变大小，也没改变方向），这种矢称为自由矢量，这样在解问题时将更加灵活与方便。

$\vec{a}=(a_1\vec{i}+a_{21}\vec{j}+a_3\vec{k}$ 称为按照 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 的坐标分解式， $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ 称为坐标式。

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$.若 $\vec{a}\neq 0$, 记 $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$。知 $\vec{a}^0$ 是单位矢量且与 $\vec{a}$ 的方向一致，且 $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0$。因此，告诉我们求矢量 $\vec{a}$ 的一种方法，即只要求出 $\vec{a}$ 的大小 $|\vec{a}|$ 和与 $\vec{a}$ 方向一致的单位矢量 $\vec{a}^0$ ，则 $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0$.若 $\vec{a}=\{a_1,a_2a_3\}$ ，知

$$\vec{a}^0=\{\frac{a_1}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}},\frac{a_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}},\frac{a_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},$$

其中 $\alpha.\beta.\gamma$ 是 $\vec{a}$ 分别与 0x 轴，0y 轴，0z 轴正向的夹角，而

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^3}},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}},\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}},$$

且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

2.矢量间的运算

设$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\},\vec{c}=\{c_1,c_2,c_3\}.$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta(0\le\theta\le\pi),\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}(|\vec{a}|\neq 0,|\vec{b}|\neq 0).$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\qquad \cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}}}.$$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}\cos 0=|\vec{a}|^2$,知$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

$\vec{a}\times\vec{b}$ 的确定（1）$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，（2）$\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{a},\vec{b}$ 所确定的平面（$\vec{a}\neq\vec{b}$,若$\vec{a}\parallel\vec{b}$,知$|\vec{a}\times\vec{b}|=0$,即$\vec{a}\times\vec{b}=0$，方向可任意确定）垂直，且$\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$构成右手系若$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 用坐标式给出，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\vec{k}$$

由行列式的性质可知$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$

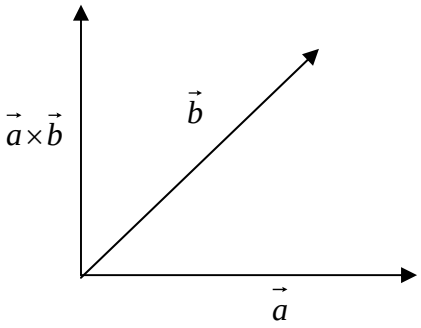


图 4-1

$|\vec{a}\times\vec{b}|$的几何意义：$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积，即$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}|h=s.$

容易知道以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的三角形面积为

$$s=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

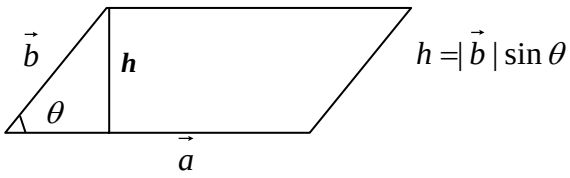


图 4-2

容易验证 $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 的性质可用行列式的性质来记，其余没有提到的性质与以前代数运算性质完全相同。

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 的几何意义 $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$表示以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为邻边的平行六面体的体积，即

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=\left||\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\theta\right|$$

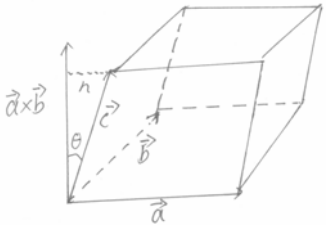


图 4-3

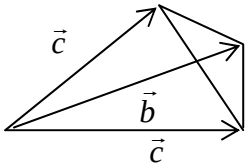


图 4-4

$=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\theta|=|\vec{a}\times\vec{b}|h=sh=v.$

容易知道以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为邻边的四面

体的体积为$V=\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$.

$\vec{a}\times\vec{b}$的应用特别重要，既若直线 L 既垂直矢量$\vec{a}$，也垂直矢量$\vec{b}$且$\vec{a},\vec{b}$不平行，则 L 与$\vec{a},\vec{b}$确定的平面垂直，又$\vec{a}\times\vec{b}$也与$\vec{a},\vec{b}$确定的平面垂直，由两直线与同一平面垂面，则两直线平行.知 L 与$\vec{a}\times\vec{b}$平行，换句话说$\vec{a}\times\vec{b}$是直线 L 的方向向量，是$\vec{a},\vec{b}$确定平面的法矢量，这对于求直线方程与平面方程显得非常重要。

3.矢量间的关系

1. $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_2+a_2b_2+a_3b_3=0$.

2. $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$的分量对应成比例$\Leftrightarrow$若$\vec{b}\neq0$，总存在唯一的常数$\lambda$，使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$。

以上是我们在实际中判断两矢量垂直与平行的常用方法，请记住.

3. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0\Leftrightarrow$若$\vec{b},\vec{c}$不共线总存在唯一的两个实数 m,n，使$\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$.

4.设三个矢量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$不共面，则对空间任一矢量$\vec{a}$，总存在唯一的三个常$l,m,n$,使

$$\vec{a}=l\vec{e}_1+m\vec{e}_2+n\vec{e}_3.$$

5.设$\vec{b}\neq0$，$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影指的是

把$\vec{a}$的起点平移到$\vec{b}$的起点 O，过$\vec{a}$的终点作$\vec{b}$的垂线交$\vec{b}$上一点 P，OP 称为$\vec{a}$在$\vec{b}$的投影，记作$P_{rj\vec{b}}\vec{a}$.

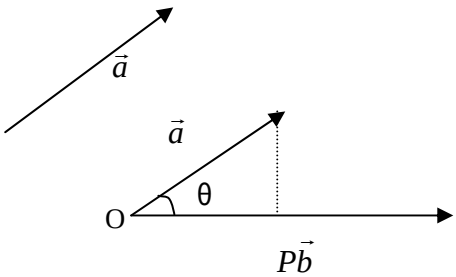


图 4-5

$$P_{rj\vec{b}}\vec{a}=OP=|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}^0|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}^0=\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|},$$

即$P_{rj\vec{b}}\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}^0=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$,而$\overrightarrow{OP}=(\vec{a}\cdot\vec{b}^0)\vec{b}^0$.

这个公式对我们在后面求点到直线上距离，点到平面距离，两异面直线公垂线的长都有帮助。

第二节 直线与平面

内容精要

（一） 定理与公式

直线与平面

直线方程

- **点向式（对称式）：** $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$
- **参数式：** $\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt\\z=z_0+nt\end{cases}$
- **两点式：** $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$
- **一般式：** $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

平面方程

- **点法式** $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
- **一般式** $Ax+By+Cz+D=0$
- **三点式** $\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$
- **截距式** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ （$a\neq0,b\neq0,c\neq0$）
- **平面束** $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

两直线 L_1、L_2 位置关系

- $\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$
- **垂直** $\Leftrightarrow l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2=0$
- **平行** $\Leftrightarrow\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

两平面 π_1、π_2 位置关系

- $\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$
- **垂直** $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
- **平行** $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

直线 L 与平面 π 的位置关系

- $\sin\theta=\frac{|lA+mB+nC|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$
- **垂直** $\Leftrightarrow\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$
- **平行** $\Leftrightarrow lA+mB+nC=0$

其中 $L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},L_1=\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$

$\pi: Ax+By+Cz+D=0, \pi_1: A_1x+B_1y+c_1z+D_1=0, \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

1．设　直线 L 方程为 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，其中 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是直线 L 上一点，$\vec{v}=\{l,m,n\}\neq 0$ 是 L 的方向向量，P_1（x_1,y_1,z_1）是直线 L 外一点，则 P_1 到 L 的距离为

$$d=\frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{v}|}.$$

证　连接 P_0P_1，过 P_1 作 L 的垂线，垂足为 Q，以 $\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0Q}$ 分邻边作平行四边形，由 $\overrightarrow{P_0Q}$ 在直线 L 上，知 $\overrightarrow{P_0Q}\parallel\vec{v}$ 且 $\vec{v}\neq 0$，知 $\overrightarrow{P_0Q}=\lambda\vec{v}$，于是

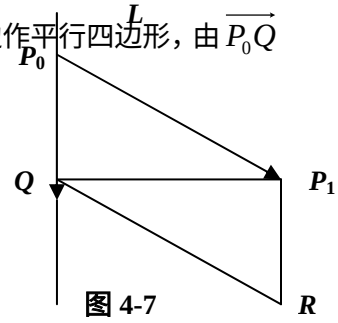


图 4-7

$$d=|P_1Q|=\frac{SP_1P_0QR}{|P_0Q|}=\frac{|\lambda\vec{v}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\lambda\vec{v}|}$$

$$=\frac{|\lambda||\vec{v}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\lambda||\vec{v}|}=\frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{v}|}$$

注：在证明过程中假设 P_0 不是 P_1 的垂足，若 P_0 是垂足，则 $d=|P_0P_1|$，实际上 $P_0=Q$ 时，上式依然成立。

2。设平面 π 的方程为 Ax+By+Cz+D=0，$\vec{n}=\{A,B,C\}\neq 0$ 是平面的法矢量，P_1（x_1,y_1,z_1）是平面 π 外一点，则 P_1 到平面 π 的距离为 $d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

证　过 P_1 作平面的垂线，垂足为 Q，在平面 π 内选一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)\neq Q$，连接 P_1P_0，得矢量 $\overrightarrow{P_1P_0}$，由 $P_1Q\perp\pi$，知 $\overrightarrow{P_1Q}\parallel\vec{n},\overrightarrow{P_1Q^0}=\pm\overrightarrow{n^0}$，于是

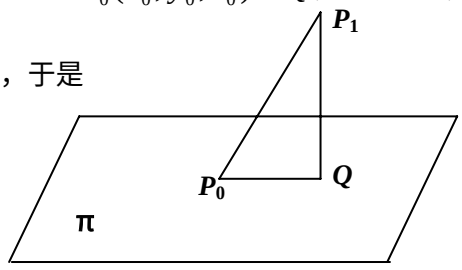


图 4-8

$$d=|P_1Q|=|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{P_1Q^0}|=|\pm(\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n^0})|=|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n^0}|$$

而 $\overrightarrow{P_1P_0}=\{x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\}$，从而

$$d=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

又 P_0 点在平面 π 上，有 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\Leftrightarrow Ax_0+By_0+cz_0=-D$，故

$$d=\frac{|-D-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2=C^2}}=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

3．设有两异面直线 $L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1},v_1=l_1i+m_1j+n_1k;$

$$L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},v_2=l_2i+m_2j+n_2k;$$

则两直线之间的距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{v_1}\times\vec{v_2})\right|}{|\vec{v_1}\times\vec{v_2}|}$

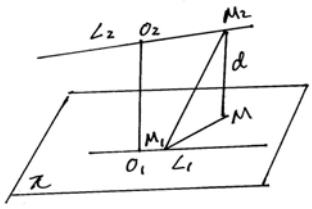


图 7-9

．　证　端点分别在两异面直线上的公垂线的长度称为两异面直线之间的距离（图 7-9）.过直线 L_1 作平面 π 平行于直线 L_2，在 L_2 上取一点 M_2，在 L_1 上取一点 M_1，从 M_2 引平面 π 的垂线 M_2M（M 为垂足），于是 $d=|\overrightarrow{M_2M}|$ 即为 L_1 与 L_2 的距离.设平面 π 的法矢量为 n，则 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 n 上的投影的绝对值即为所求的距离.即

$$d=|(\overrightarrow{M_2M})_n|=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|},$$

而 $\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2$，所以 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}.$

4．设 L_1 与公垂线 O_1O_2 确定的平面为 π_1，由 π_1 经过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 设 π_1 的法矢量为 $\vec{n_1}$，由 O_1O_2 的方向向量为 $\vec{v_1}\times\vec{v_2}$，而 $\vec{v_1}\perp\vec{v_1}\times\vec{v_2},\vec{n_1}\perp\vec{v_1}$，知 $\vec{n_1}=(\vec{v_1}\times\vec{v_2})\times\vec{v}_2$，从而可用点法式写出平面
π_1 的方程。

设 L_2 与公垂线 O_1O_2 确定的平面为 π_2，由 π_2 经过点 $M_2(x_1,y_1,z_1)$ 设 π_2 的法矢量为 $\vec{n_2}$，同理可得 $\vec{n_2}=(\vec{v_1}\times\vec{v_2})\times\vec{v_2}$，从而可用点法式写出平面 π_2 的方程，因此

公垂线 O_1O_2 的方程：$\begin{cases}\pi_1\text{方程},\\ \pi_2\text{方程}.\end{cases}$

O_1O_2 与 L_1 的垂足 O_1：$L_1\begin{cases}\text{方程},\\ \pi_2\text{方程}.\end{cases}$

O_1O_2 与 L_2 的垂足 O_2：$L_2\begin{cases}\text{方程},\\ \pi_1\text{方程}\end{cases}$

5．直线方程的点向式与一般式的相互转化.

点向式　$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 转化为一般式为 $\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m},\\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}.\end{cases}$

一般式$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$转化为点向式有两种方法

（1） 消元法：例如 消去 x，得 y,z 的一次方程，解出 $z=\frac{y-y_0}{m}$.消去 y，得 x，z 的一次方程。解得 $z=\frac{x-x_0}{l}$，于是直线的点向式为 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-0}{1}$.

（2）由直线是两个平面的交线，知三元一次方程组有无数组解。

例如 令 z=0，解得 $x=x_0$,$y=y_0$,且直线既在 π_1内又在 π_2内，知直线既垂直于 $\vec{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$，又垂直于 $\vec{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$，所以直线的方向向量为 $\vec{n_1}\times\vec{n_2}$，从而直线可用点向式表示

若从直线的一般式求直线的方向向量 $\vec{v}$，则 $\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$.

6．判断两直线的位置关系

设 $L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, $L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$.

（i）若 $\vec{v_1}=\{l_1,m_1,n_1\}\parallel\vec{v_2}=\{l_2,m_2,n_2\}$,则$L_1,L_2$ 在同一平面内且平行

（ii）若 $\vec{v_1}\parallel\vec{v_2}$ 且 $(\vec{v_1}\times\vec{v_2})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{vmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}=0$,则$L_1,L_2$共线.

（iii）若 $(\vec{v_1}\times\vec{v_2})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}\neq0$,则$L_1,L_2$ 为异面直线。

7．灵活地利用所给条件，用平面的一般式求平面方程

（i）若平面经过原点，则平面方程为 Ax+By+Cz=0，再给两个条件，即可求出平面方程

（ii）若平面平行 z 轴，则平面方程为 Ax+By+D=0，再给两个条件，即可求出平面方程

（iii）若平面经过 z 轴，则平面方程为 Ax+By=0，再给一个条件，即可求出平面方程

其它情况类似。

第三节　曲线与曲面

内容精要

（一）　定理与公式

曲线与曲面

- **曲面方程**
  - **一般式：** $F(x\cdot y\cdot z)=0$
  - **参数式：** $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$
- **曲线方程**
  - **参数式：** $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$
  - **一般式：** $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$
- **特殊的曲面**
  - **柱面：** $F(x,y)=0,$ **准线为** $\begin{cases}F(x,y)=0,\\z=0,\end{cases}$ **母线平行 z 轴**
  - **锥面：过空间一定点 Q 的动直线，沿曲线 P（不过原点 Q）移动所生成曲面**
  - **旋转曲面：** $\begin{cases}F(y,z)=0\\x=0\end{cases}$ **绕 z 轴旋转所得曲面** $F(\pm\sqrt{y^2+x^2},z)=0$
- **二次曲面**
  - **椭球面：** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **（图 1）**
  - **椭圆抛物面：** $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{b^2}{b^2}$ **（图 2）**
  - **单叶双曲面：** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **（图 3）**
  - **双叶双曲面：** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ **（图 4）**
  - **二次锥面：** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ **（图 5）**

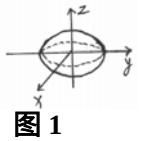


图 1

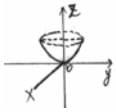


图 2

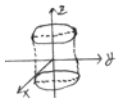


图 3

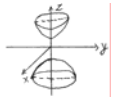
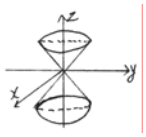
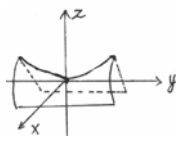


图 4





1．用定义求曲面Σ方程的方法

（1）设M（x,y,z）是曲面Σ上任意一点，根据题意，列出点M所满足的条件，得到含有x,y,z的等式，化简得F（x,y,z）=0，

（2)说明坐标满足方程F(x,y,z)=0的点一定在曲面Σ上,则曲面Σ的方程为F(x,y,z)=0.一般来说，都是可逆的，故一般情况下，只需（1）就可以了，

2．曲线Γ：$\begin{cases}F(y,z)=0\\x=0\end{cases}$绕0z轴旋转所成旋转曲面Σ的方程是$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$

证　设M（x,y,z）是曲面Σ上任意一点，面M是曲线Γ上某点M，（x_1,y_1,z_1,）绕*0z*轴旋转过程中所取到，因此有$\begin{cases}F(y_1,z_1)=0\\x_1=0\end{cases}$

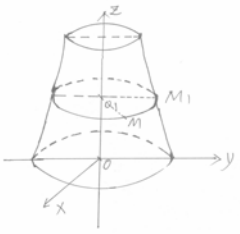


图 4-10

$z=z_1$，$x^2+y^2=x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=y_1^{\,2}(|o_1M_1|=|o_1M|)$

$\Rightarrow$　　$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2},z_1=z,$　故旋转曲面方程为

$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

这个结果可作为一个规律记住,即坐标平面上的曲线绕该坐标平面上某个坐标轴旋转所生成的曲面方程是：把平面曲线方程中绕相应轴的变量不变，另外一个变量化成正负根号下方程中另外一个变量与该平面垂直轴对应的变量的平方和即为所求的旋转曲面方程。

3．一般参数方程$\Gamma:\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\\z=h(t)\end{cases}$绕0z轴旋转所成旋转曲面Σ的方程是

$$x^2+y^2=\{f[h^{-1}(z)]\}^2+\{g[h^{-1}(z)]\}^2.$$

证　设$M(x,y,z)$是曲面 上任意一点，而M是由曲线Γ上某点$M_1(x_1,y_1,z_1)$（对应的参数为t_1）绕0z轴旋转所得到。因此有$x_1=f(t_1),y_1=g(t_1),z_1=$

$z=z_1,\ x^2+y^2=x_1^{\,2}+y_1^{\,2},\Rightarrow\ z=h(t_1)\Rightarrow t_1=h^{-1}(z),$

$x_1=f[h^{-1}(z)],y_1=g[h^{-1}(z)]$，故所求旋转曲面方程为

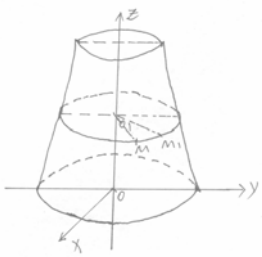


图 4-11

$x^2+y^2=\{f[h^{-1}(z)]\}^2+\{g[h^{-1}(z)]\}^2.$

特别地，若Γ绕0z轴旋转时，且Γ参数方程表示为$\begin{cases}x=f(z),\\y=g(z).\end{cases}$则

$x^2+y^2=f^2(z)+g^2(z).$

事实上，由前面的证明过程可知$x_1=f(z_1),y_1=g(z_1),\ z=z_1$，$x^2+y^2=x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}$

$\Rightarrow x_1=f(z),y_1=g(z),$　　故$x^2+y^2=f^2(z)+g^2(z).$

这个结果可作为一个规律记住，一个用参数方程表示的曲线Γ绕某个坐标轴旋转所生成曲面的方程是：若把该曲线表示成该坐标轴对应的变量作为参数的参数方程，则旋转曲面的方程是由参数方程两个等式两边平方再相加得到等式。

4．求曲线$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$在坐标平面0xy上的投影曲线方法

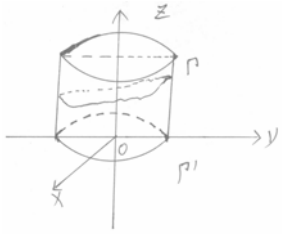


图 4-12

由方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$消去z得到不含z的一个方程$H(x,y)=0.$

而$H(x,y)$=0是一个母线平行于z轴的柱面，且曲线Γ也在该柱面上.Γ在0xy平面上的投影曲线Γ'与柱面$H(x,y)=0$与z=0的交线是同一条曲线，故曲线Γ在0xy平面上的投影Γ'的方程为$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$，在其它坐标平面上投影曲线的求法完全类似

第九章　三重积分及第一类曲线与曲面积分

考研大纲要求

了解 重积分的性质，第一类曲线、曲面积分的性质.
会 计算三重积分（直角坐标、柱面坐标、球面坐标），用重积分、曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量（平面图形的面积、体积、曲面面积、弧长、质量、质心、形心、转动惯量等）.
理解三重积分的概念.
掌握计算第一类类曲线积分、曲面积分的方法.

一、内容精要

（一）重要定理与公式

1.立体区域的画法。

首先要画出三重积分立体区域的草图，一般的方法为：

（1）若立体的底部在 *Oxy* 平面上，先画出立体底部区域的边界曲线，相应画出了底部区域，再画出立体的侧面，最后画出顶部曲面与侧面的交线的顶部曲面，从而也画出了侧面的边界曲线。这样就画出了整个立体的草图。

（2）若立体的底部是一个曲面，先应画侧面，再画底部曲面与侧面的交线与底部曲面，最后画顶部曲面与侧面的交线与顶部曲面，从而就形成了立体区域。

（3）若立体只有底部曲面与底部曲面，无侧面，只要画出顶部曲面与底部曲面的交线与顶部曲面和底部曲面，则得到立体区域。

2.三重积分在直角坐标系下的计算

（1）投影法

若平行于 *Oz* 轴的直线与立体 *V* 的边界曲面至多有两个交点（母线平行于 *Oz* 轴的侧面除外），设 *V* 在 *Oxy* 平面上的投影区域为 σ_{xy}，在 σ_{xy} 内的点作平行于 *Oz* 轴的直线，此直线沿 *Oz* 轴正向穿过区域 *V*，穿入边界曲面为 $z=z_1(x,y)$，穿出的边界曲面为 $z=z_2(x,y)$，有 $z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$ 换句话说立体区域 *V* 是曲面 $z=z_1(x,y)$（称为下曲面），$z=z_2(x,y)$（称为上曲面）与以 σ_{xy} 边界为准线，母线平行于 *Oz* 轴的柱面为侧面。如图 6-25（1）（特殊情况该柱面可退缩为 $z=z_1(x,y)$ 与 $z=z_2(x,y)$ 的交线如图 6-25（2））所围成的立体，即

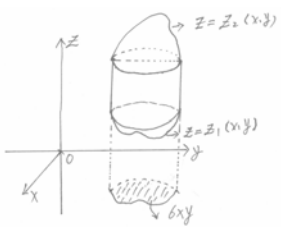


图 6-25 （1）

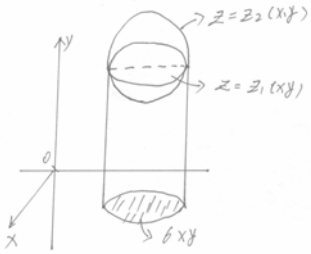


图 6-25（2）

立体 V 在以 σxy 边界为准线，母线平行于 $0z$ 轴的柱面之中（知立体中任意一点 $\rho(x,y,z)$ 在 $0xy$ 平面的投影点 $(x,y)\in\sigma xy$）。且立体 V 在 $z=z_1(x,y)$ 的上方，在 $z=z_2(x,y)$ 的下方（即立体中任意一点 $\rho(x,y,z)$ 的竖坐标 z，有 $z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$，故立体区域 V 可表示为

$$V=\{(x,y,z):z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in\sigma xy\}.$$

因此 $$\iiint_V f(x,y,z)dv=\iint_{\sigma xy}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz.$$

若 σxy 是 x 一型区域：$\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),a\le x\le b$，则有

$$\iiint_V f(x,y,z)dv=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz.$$

若 σxy 是 y 一型区域：$\varphi_1(y)\le x\le\varphi_2(y),c\le x\le d$，则有

$$\iiint_V f(x,y,z)dv=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}dx\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz.$$

若 σxy 是圆域或圆域的一部分时，也可化为 σxy 上的二重积分以后，再用极坐标变换化为累次积分。

对于立体区域 V 在 $0yz$ 平面上的投影或 $0zx$ 平面上的投影与在 $0xy$ 平面上的投影要求类似，读者可自己进行总结，并化为累次积分。

这种方法适合投影区域较简单，上、下曲面可表示为垂直坐标平面坐标轴对应的变量为坐标平面上对应的两个变量的函数，且化成累次积分后容易计算出积分的值。

（2）平面截割法

设立体 V 介于两平面 $z=c,z=d$ 之间（$c<d$，知对立体 V 中任意一点 $P(x,y,z)$，有 $c\le z\le d$）。过 $(0,0,z),z\in[c,d]$，作垂直于 $0z$ 轴的平面与立体相截，截面区域为 D_z，如图 6-26 所示，（知对立体 V 中的任意一点 $P(x,y,z)$，有 $(x,y)\in D_z$），从而立体区域 V 可表示为：

$$V=\{(x,y,z):(x,y)\in D_z,c\le z\le d\},$$

于是 $$\iiint_V f(x,y,z)dv=\int_c^d dz\iint_{D_z}f(x,y,z)dxdy$$

若 $f(x,y,z)$ 仅是 z 的表达式或是常数，而 D_z 的面积有公式可计算，可使这种方法。因为这时，$f(x,y,z)=g(z)$，设 D_z 的面积为 S_{D_z}，于是

$$\iiint_V g(z)dv = \int_c^d dz \iint_{D_z} g(z)dxdy = \int_c^d g(z)dz \iint_{D_z} dxdy = \int_c^d g(z)\cdot S_{D_z} dz.$$

从而直接化成了关于 z 的一元函数定积分。

同理，根据具体情况，也可作垂直于 $0y$ 轴或 $0x$ 轴的平面去截割立体。

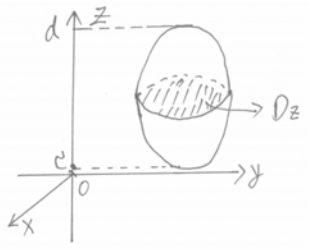


图 6-26

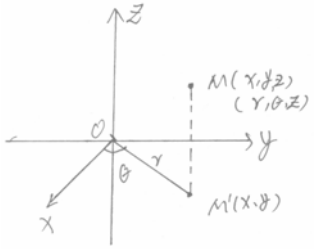


图 6-27

3.三重积分在柱面坐标系下的计算

（1）柱面坐标变换

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z.0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r < +\infty, -\infty < z < +\infty.$ 由直角坐标与柱面坐标可知，(r,θ) 是点 $M(x,y,z)$ 在 $0xy$ 平面上投影点 $M'(x,y)$ 的极坐标，z 是原直角坐标系中的竖坐标，如图 6-27.此时 $\iiint_V f(x,y,z)dv = \iiint_V f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz.$

（2）柱面坐标系下的计算

设平行于 $0z$ 轴的直线与区域 V 的边界至多只有两个交点，设 V 在 $0xy$ 平面上的投影区域为 σxy。区域 σxy 用 r,θ 不等式表示与平面中的极坐标变换把平面区域用 r,θ 不等式表示完全相同，把上面投影法中的上曲面与下曲面表示成 $z = z_2(r,\theta), z = z_1(r,\theta).$ 于是立体区域 V 可表示为

$$V: \{(r,\theta,z): z_1(r,\theta) \le z \le z_2(r,\theta), (r,\theta) \in \sigma r\theta\}.$$

从而 $\iiint_V f(x,y,z)dv = \iint_{6r\theta} rdrd\theta \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz$

若 $\sigma r\theta$ 表示成 θ 一型区域：$r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$，则

$$\iiint_V f(x,y,z)dv = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rdr \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz.$$

若立体在 $0xy$ 平面上的投影区域是圆域或圆域的一部分（或被积函数中含有 x^2+y^2），可用柱面坐标系下的计算。在柱面坐标系下，一般总是先积 z，后积 r，最后积 θ。

4.三重积分在球面坐标系下的计算

（1）球面坐标变换

$x=\rho\sin\varphi\cos\theta, y=\rho\sin\varphi\sin\theta, z=\rho\cos\varphi. 0\le\theta\le 2\pi. 0\le\varphi\le\pi, 0\le\rho\le+\infty$. 由直角坐标和球面坐标可知。$\theta$ 就是点 $M(x,y,z)$ 在 Oxy 平面上投影点 $M'(x,y)$ 的极坐标 (r,θ) 中的 θ，如图 6-28. 此时 $\iiint_V f(x,y,z)dv=\iiint_V f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\theta d\varphi d\rho.$

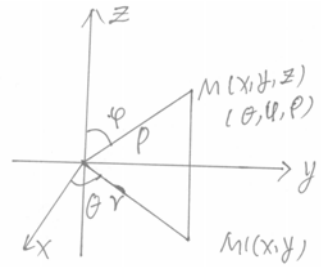


图 6-28

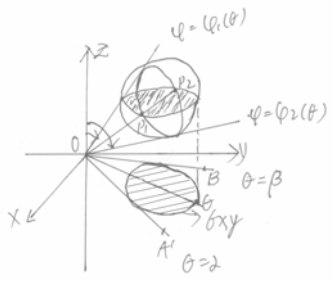


图 6-29

（2）球面坐标系下的计算

找出立体 V 在 Oxy 平面上投影区域 σxy 的极角 θ 的范围 $\alpha\le\theta\le\beta$。即立体 V 在两半平面 ZOA 与 ZOB 之间，即立体 V 中的任意一点 $M(\theta,\varphi,\rho)$ 满足 $\alpha\le\theta\le\beta$。在 α,β 之间过极点作射线 $\theta=\theta$，该射线与 Oz 轴组成的半平面与立体起截得一截面区域。若对[2，B]之任一 Q 值。对应的射线与 OZ 轴组成的半平面与立体 V 截面的圆形相同。我们一般选取特殊的 Q 值如 Q=$\frac{\pi}{2}$，此时得到的截面，我们观察更清楚。找出该区域 φ 的范围 $\varphi\left[{}_1(\theta),\varphi_2(\theta)\right]$，即 $\varphi_1(\theta)\le\varphi\le\varphi_2(\theta)$（一般情况下 $\varphi_1(\theta)=0$，且 $\varphi_2(\theta)$）为常数)。过极点 0 在该截面上作射线与截面的边界交于两点。极径小的交点落在下曲面 $\rho=\rho_1(\theta,\varphi)$，极径大的交点落在上曲面 $\rho=\rho_2(\theta,\varphi)$，即截面上任意一点 (φ,ρ) 满足 $\rho_1(\theta,\varphi)\le\rho\le\rho_2(\theta,\varphi)$，$\varphi_1(\theta)\le\varphi\le\varphi_2(\theta)$,如图 6-28.从而在球面坐标立体区域 V 可表示为

$$v=\{(\theta,\varphi,\rho):\rho_1(\theta,\varphi)\le\rho\le\rho_2(\theta,\varphi),\varphi_1(\theta)\le\varphi\le\varphi_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}.$$ 于是

$$\iiint_V f(x,y,z)dv=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\sin\varphi d\varphi\int_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)}f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho$$

即在球面坐标系下，总是先积 ρ，再积 φ，最后积 θ，而且在大多数情况下，$\rho_1(\theta,\varphi)=0,\varphi_1(\theta)=0,\varphi_2(\theta)$为常数。

若立体 V 是由以原点为心的球面围成的立体或是由以原点为球心的球面与以原点为顶点的维面围成的主体，（或被积函数中含有 $x^2+y^2+z^2$）。此时用球面坐标系下的计算。

5.第一类曲线积分的计算

设第一类曲线积分为 $\int_\Gamma f(x,y,z)ds$.

若曲线 Γ 表示为参数方程 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 具有连续的导数，且 $\alpha \le t \le \beta.$ 与求平面曲线的弧长微分类似，可得 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt.$ 于是

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t),+z'^2(t)}dt.$$

关建是把曲线 Γ 表示成参数方程，并且找出参数的区间 $[\alpha,\beta]$ 即可化成 t 的一元函数定积分。

设平面第一类曲线积分为 $\int_\Gamma f(x,y)ds$

（1）若 $\Gamma:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\alpha \le t \le \beta.$ 则 $\int_\Gamma f(x,y,)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$

（2）若 $\Gamma: y=\varphi(x),a \le x \le b,$ 则 $\int_\Gamma f(x,y)ds=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx.$

（3）若 $\Gamma: x=\psi(y),c \le y \le d,$ 则 $\int_\Gamma f(x,y)ds=\int_c^d f(\psi(y),y)\sqrt{1+\psi'^2(y)}dy.$

（4）若 $\Gamma: r=r(\theta),\alpha \le \theta \le \beta,$ 即 $x=r(\theta)\cos\theta, y=r(\theta)\sin\theta,\alpha \le \theta \le \beta.$ 则

$$\int_\Gamma f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta.$$

6.第一类曲面积分的计算

若曲面 S 为光滑曲面： $z=z(x,y),(x,y)\in\sigma_{xy}$ （σ_{xy} 是曲面 S 在 $0xy$ 平面上的投影）。计算 $\iint\limits_S f(x,y,z)dS.$ ，

在曲面 S 上取微元 dS，设点 $P(x,y,z(x,y))\in dS$ ，则在该点处曲面 S 的法线矢量为 $\vec{n}=\pm\{z'_x,z'_y,-1\},\vec{n}$ 与 z 轴正向的夹角 r 的余弦为 $\cos r=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}.$

由图 6-30 知 $d\sigma=|\cos r|\cdot dS$ 或 $dS=\dfrac{1}{|\cos r|}d\sigma=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,d\sigma,$ （1）

所以 $dQ=f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,d\sigma,$

于是 $\iint\limits_S f(x,y,z)dS=Q=\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,d\sigma.$ （2）

特别地，若 $f(x,y,z)\equiv 1$，则 $\iint\limits_S dS=\iint\limits_{\sigma xy}\sqrt{1+z_x'^{\,2}+z_y'^{\,2}}\,d\sigma=S.$

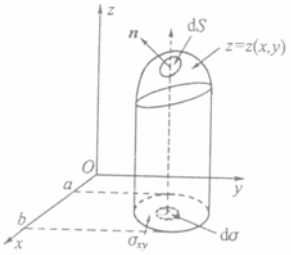


图 6-30

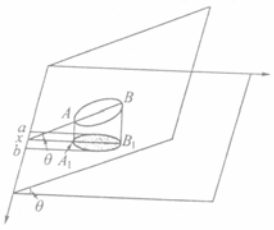


图 6-31

注：现证明（1）式。

证　由于 *dS* 很小，所以可把 *dS* 看成一个平面，它的面积仍记为 *dS*（图 6-31）。*n* 是平面 *dS* 的法矢量，平面 σ_{xy} 的法矢量是 *z* 轴，因此，平面 *dS* 与平面 σ_{xy} 的夹角（锐角）θ 的余弦为：$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{z_x'^{\,2}+z_y'^{\,2}=1}}=|\cos r|$　（θ 为常数）。

如图 6-31 建立坐标系，$d\sigma$ 中 *x* 的变化范围是 $x\in[a,b]$. 过 *x* 作垂直于 *x* 轴的直线交 $d\sigma$ 于 A_1 与 B_1，设 $|A_1B_1|=h(x)$，有 $d\sigma=\int_a^b h(x)dx.$

设 A_1 与 B_1 分别是区域 *dS* 中两点 *A*，*B* 在 $d\sigma$ 上的投影点，则

$$|AB|\cos\theta=|A_1B_1|\text{，或}\quad |AB|=\frac{1}{\cos\theta}|A_1B_1|=\frac{1}{\cos\theta}h(x).$$

于是　$dS=\int_a^b|AB|dx=\int_a^b\frac{1}{\cos\theta}h(x)dx=\frac{1}{\cos\theta}\int_a^b h(x)dx=\frac{1}{\cos\theta}d\sigma,$

得 $\cos\theta dS=d\sigma.$ 即 $|\cos r|dS=d\sigma$　或　$dS=\dfrac{1}{|\cos r|}d\sigma=\sqrt{1+z_x'^{\,2}+z_y'^{\,2}}\,d\sigma.$

同理，若曲面 $S:y=y(x,z),(x,z)\in\sigma_{xy}$，则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\sigma_{zx}}f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,d\sigma.\qquad(3)$$

特别地，若 $f(x,y,z)\equiv 1$，则 $\iint\limits_S dS=\iint\limits_{\sigma_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,d\sigma=S.$

若曲面 $S:x=x(y,z),(y,z)\in\sigma_{yz}$，则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\sigma_{yz}}f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,d\sigma.\qquad(4)$$

特别地，若 $f(x,y,z)\equiv 1$，则 $\iint\limits_S dS=\iint\limits_{\sigma_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,d\sigma.$

而一般曲面可分成若干块，使得每一块可利用公式（2）（3）（4）。

第二类曲线与曲面积分

大纲要求

了解第二类曲线积分的性质，散度与旋度的概念.

会用斯托克斯公式计算曲线积分，计算散度与旋度，第二曲线积分及曲面积分求物理量 引力、功及流量等.

理解 第二类曲线、曲面积分的概念.

掌握 计算第二类曲线积分、曲面积分的方法，用高斯公式计算第二类曲面积分的方法，格林公式并会运用平面曲线积分与路径元关的条件，

内容精要

基本概念

1.第二类曲线积分

定义 6.5 若矢量函数 $\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 与曲线 Γ_{AB} 上点(x,y,z)处切线的单位矢量 $\vec{T}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ (且 $\vec{T}^0$ 的方向 Γ_{AB} 指定的方向一致)的点乘积在 Γ_{AB} 上的第一类曲线积分 $\int_{\Gamma_{AB}}(\vec{A}\cdot\vec{T}^0)ds.$ 存在 该积分值称为 $\vec{A}(x,y,z)$ 沿曲线 Γ 从 A 到 B 的第二类曲线积分。

$\oint_{\Gamma}(\vec{A}\cdot\vec{T}^0)ds$ 的物理意义是：当流体流速为 $\vec{A}$ 沿闭合曲线 Γ 指定的方向通过的环流量。

注：由定义知第二类曲线积分是特殊的第一类曲线积分。若把 $\vec{A}.\vec{T}^0$ 看成数量函数，这个积分也具有第一类曲线积分的性质。

由定义容易得到下面两个性质

性质 1 $\int_{\Gamma_{AB}}(\vec{A}\cdot\vec{T}^0)ds=-\int_{\Gamma_{BA}}(\vec{A}\cdot\vec{T}^0)ds$

注：等式左右两边的 $\vec{T}^0$ 正好相差一个符号。

性质 2 若有向曲线 Γ_{AB} 是由有向曲线 Γ_{AC}，Γ_{CB} 首尾相接而成，则 $\int_{\Gamma_{AB}}(\vec{A}\cdot\vec{T}^0)ds=\int_{\Gamma_{AC}}(\vec{A}\cdot\vec{T}^0)ds+\int_{\Gamma_{CB}}(\vec{A}\cdot\vec{T}^0)ds.$

记 $d\vec{s}=\vec{T}^0ds=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}ds=\{dx,dy,dz\}.$

注：$\cos\alpha ds=\Delta x=dx$ 是 ds 在 x 轴上的有向投影，当 α 为锐角，$dx>0$，当 α 为钝角，$dx<0$，$\alpha=\frac{\pi}{2},dx=0$，而 dy,dz 是 ds 分别在 y 轴，z 轴上的有向投影，从而第二类曲线积分五种形式之一出现：

$$\int_{\Gamma_{AB}}\left(\vec{A}\cdot\vec{T}^{0}\right)ds=\int_{\Gamma_{AB}}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)ds$$
$$=\int_{\Gamma_{AB}}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\int_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$
$$=\int_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+\int_{\Gamma_{AB}}Q(x,y,z)dy+\int_{\Gamma_{AB}}R(x,y,z)dz.$$

而常常以形式$\int_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$出现的较多，如果是直接计算，不论是给哪一种形式出现，都需化成$\int_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$的形式（最后一种形式和上面形式实际上是相同的）

若曲线$\Gamma_{AB}:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$，为光滑曲线且起点$A$对应的参数为$t_A$，终点$B$对应的参数为$t_B$，则

$$\int_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$
$$=\int_{t_A}^{t_B}\left[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right]dt.$$

必须注意，公式中的t_A，t_B一定要与曲线的起点A终点B相对应。即化成t函数的定积分时，积分的下限必须是起点A对应的参数，积分的上限必须是终点B对应的参数，至于上下限谁大谁小不受限制，这一点与第一类曲线积分化为一元函数定积分时，下限一定小于上限的限制是不同的。

而平面上的第二类曲线积分，是空间第二类曲线积分的特殊情况.

定义 6.6　没有洞的平面区域，称为平面单连通区域，有洞的平面区域称为复连通区域。

定义 6.7 若空间区域V中任意的封闭曲线L，都可以找以L为边界的曲面$S\subset V$，则V为线单连通区域。

2.第二类曲面积分

定义 6.8　若矢量函数$\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$与曲面$S$在曲面上点$(x,y,z)$处单位法向量$\vec{n}^{0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$（$\vec{n}^{0}$的方向与曲面$S$指定的方向相同）的点乘积在$S$上的第一类曲面积分$\iint_{S}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^{0}\right)dS$存在，该积分值称为$\vec{A}(x,y,z)$沿定侧曲面$S$上的第二类曲面积分。

$\iint_{S}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^{0}\right)dS$的物理意义是当流速为$\vec{A}$的不可压缩流体，通过封闭曲面$S$沿指定侧的$S$流量。

由定义知第二类曲面积分是特殊的第一类曲面积分，若把$\vec{A}\cdot\vec{n}^{0}$看成一个数量函数，这

时为第一类曲面积分，也具有第一类曲面积分的性质。

由定义知第二类曲面积分具有下面两条性质

性质 1 $\iint\limits_{S^+}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^0\right)dS=-\iint\limits_{S^-}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^0\right)dS$。

性质 2 $\iint\limits_{S}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^0\right)dS=\iint\limits_{S_1}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^0\right)dS+\iint\limits_{S_2}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^0\right)dS.$

其中 S_1，S_2 的侧与曲面 S 的侧相同且 $S=S_1+S_2$，S_1，S_2 只有公共边界。

3.场论

定义 6.9 设 $\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，且 P,Q,R 偏导数存在，称函数 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 为向量函数 $\vec{A}$ 在点 M（x，y，z）的散度，记作 $div\vec{A}(x,y,z)$. 即

$$div\vec{A}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

散度具有线性运算法则，即 $div\left(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}\right)=\alpha div\vec{A}+\beta div\vec{B}.$ 其中 α,β 为常数，$\vec{A},\vec{B}$ 为向量函数，利用散度的概念，高斯公式可写成下列简洁形式 $\oiint\limits_{S}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\iiint\limits_{V}div\vec{A}dv.$

定义 6.10　若 $\forall M(x,y,z)\in v$, 有 $div\vec{A}=0$，称 $\vec{A}$ 为无源场，并有下面两个推论。

定义 6.11　设 $\vec{A}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，且 P,Q,R 具有一阶偏导，称矢量函数 $\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}$ 为矢量函数 $\vec{A}$ 在点 $M(x,y,z)$ 处的旋度，记作 $rot\vec{A}$，即

$$rot\vec{A}=\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}$$ 或者形式可写成 $rot\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

以便记忆.旋度也具有线性运算法则，即 $rot\left(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}\right)=\alpha rot\vec{A}+\beta rot\vec{B}.$ 此时斯托克斯公式可写成

$$\oint_L\vec{A}\cdot d\vec{s}=\iint\limits_{S}rot\vec{A}\cdot d\vec{S}.$$

（二）重要定理与公式

定理 6.2 （格林（Green）公式 ） 若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上具有连续的一阶偏导数，则 $\oint_\Gamma Pdx+Qdy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$，这里 Γ 为区域 D 的边界曲线，并取

正向。

格林公式也可借助行列式来记忆 $\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy=\iint_{D}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}dxdy$.

注意：这里 $\frac{\partial}{\partial x}$ 与 Q 乘积指的是 $\frac{\partial}{\partial x}Q=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

定理 6.3　设在单连通区域 D 内，P，Q 具有连续的一阶偏导数且 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，则环绕同一些洞（如图 10-1）的任何两条闭曲线（取同方向）上的曲线积分相等。

平面曲线积分与路径无关性定理

设 $D\subset R^2$ 是平面单连通区域，若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 内具有连续的一阶偏导数，则以下四个条件等价：

（1）沿 D 中任一按段光滑的闭曲线 L，有 $\oint_{L} Pdx+Qdy=0$ ；

（2）对 D 中任一按段光滑曲线 Γ，曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx+Qdy$ 与路径无关，只与 Γ 的起点和终点有关；

（3） $Pdx+Qdy$ 是 D 内某一些函数 $u(x,y)$ 的全微分，即在 D 内存在一个二元函数 $u(x,y)$，使 $du=Pdx+Qdy$，即 $\frac{\partial u}{\partial x}=P,\frac{\partial u}{\partial y}=Q$ ；

（4）在 D 内每一点处，有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

定理 6.4（斯托克斯（Stokes）公式 ）　设光滑曲面 S 的边界曲线 L 是按段光滑的连续曲线，若 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 S（连同 L）上具有连续的一阶偏导数，则

$$\oint_{L} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

其中 S 的侧面与 L 的方向按右手法则确定由定理的证明过程可知，只要以 L 为边界且符合定理条件的曲面 S，结论都成立，从而我们在利用 Stokes 公式时，寻找以 L 为边界的较简单曲面 S，比如平面上的圆面，椭圆面，三角形平面或球面等等，以利于解决问题。

定理 6.5（空间曲线积分与路径无关性）

设 $\Omega\subset R^3$ 为空间线单连通区域，若函数 P、Q、R 在 Ω 上具有连续的一阶偏导数，则以下四个条件是等价的：

（1）对于 Ω 内任一按段光滑的封闭曲线 L，有 $\oint_{L} Pdx+Qdy+Rdz=0$ ；

（2）对于Ω内任一按段光滑的曲线Γ，曲线积分$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$与路径无关，仅与起点、终点有关；

（3）$Pdx+Qdy+Rdz$是Ω内某一函数的全微分，即存在Ω内的三元函数$u(x,y,z)$，使$du=Pdx+Qdy+Rdz$，即$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\frac{\partial u}{\partial y}=Q,\frac{\partial u}{\partial z}=R$；

（4）$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$在$\Omega$内处处成立。

即$rot\vec{A}\equiv 0,(x,y,z)\in\Omega$，其中$\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$.

设$d\vec{S}=\vec{n}^0dS=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}dS=\{dydz,dzdx,dxdy\}$，其中$dxdy=\cos rdS$，称为$dS$在$0xy$平面上的有向投影，当$r$为锐角时，$dxdy>0$，当$r$为钝角时，$dxdy<0$，当$r=\frac{\pi}{2}$时，$dxdy=0$。

我们可以证明$\cos r=\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)|\cos r|$。事实上，当$r$为锐角时，$\cos r>0,\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)=1,$知$\cos r=\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)|\cos r|$，当$r$为钝角时，$\cos r<0,\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)=-1,$知$\cos r=\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)|\cos r|$，当$r$为$\frac{\pi}{2}$时，$\cos r=0,\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)=0,$知$\cos r=\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)|\cos r|$。

从而$dxdy=\cos rdS=\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)|\cos r|dS=\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)d\sigma.$同理可知$\cos\alpha=\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)|\cos\alpha|$，$\cos\beta=\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)|\cos\beta|$，且$dydz=\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)d\sigma$，$dzdx=\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)d\sigma.$其中$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

第二类曲面积分常常以下面五种形式之一出现：

$$\iint_S \left(\vec{A}\cdot\vec{n}^0\right)dS = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos r\right)dS$$

$$= \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

$$= \iint_S P(x,y,z)dydz + \iint_S Q(x,y,z)dzdx + \iint_S R(x,y,z)dxdy.$$

如果是直接计算，无论是以哪一种形式给出，一定要化下面形式

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + \iint_S Q(x,y,z)dzdx + \iint_S R(x,y,z)dxdy$$

来计算，而且每一项要分别计算再相加，我们以计算 $\iint_S R(x,y,z)dxdy$ 为例。

要求光滑曲面 S 一定要表示成 $z = z(x,y):(x,y)\in\sigma xy$（其中 σxy 是曲面 S 在 $0xy$ 平面上的投影区域），且要求曲面 S 上每一点（x，y，z）处的法向量与 $0z$ 轴的夹角或者全是锐角或者全是钝角（曲面上个别曲线的法向量可以为 $\frac{\pi}{2}$）或者全是 $\frac{\pi}{2}$。如果做不到上述要求，需把 S 分成几块，使得每一块能做到上述要求，然后根据第二类曲面积分性质，把 S 上的第二类曲面积分化为小块曲面上的第二类曲面积分，计算之再相加之即可。

现假设 S 符合上述要求，即 $S: z = z(x,y),(x,y)\in\sigma xy$，且 r 全是锐角或全是钝角或全是 $\frac{\pi}{2}$，此时 $\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)$ 为一常数，则

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\cos r dS = \iint_S R(x,y,z)\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)\left|\cos r\right|dS$$

$$= \iint_{6xy} R(x,y,z(x,y))\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)d\sigma = \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-r\right)\iint_{\sigma xy} R(x,y,z(x,y))d\sigma.$$

即 r 全为锐角时 $\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_{\sigma xy} R(x,y,z(x,y))d\sigma.$

即 r 全为钝角时 $\iint_S R(x,y,z)dxdy = -\iint_{\sigma xy} R(x,y,z(x,y))d\sigma.$

即 r 全为 $\frac{\pi}{2}$ 时 $\iint_S R(x,y,z)dxdy = 0.$

注：$r = \frac{\pi}{2}$ 时，$dxdy = \cos\frac{\pi}{2}dS = 0.$ 换句话说如果 S 在 $0xy$ 平面上的投影面积为零时，有 $r = \frac{\pi}{2}$，此时 $\iint_S R(x,y,z)dxdy = 0.$

同理可知　计算 $\iint_S R(x,y,z)dydz$ 时，要求 $S: x = x(y,z),(y,z)\in\sigma yz$（$S$ 在 $0yz$ 平面上的投影区域）α 全是锐角或全是钝角或全是 $\frac{\pi}{2}$，此时，

$$\iint_S P(x,y,z)dxdz = \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\iint_{\sigma yz} P(x(y,z),y,z)d\sigma.$$

计算 $\iint_S Q(x,y,z)dzdx$ 时，要求 $S: y = y(z,x), (z,x)\in \sigma zx$（$S$ 在 $0zx$ 平面上的投影区域）β 全是锐角或全是钝角或全是 $\frac{\pi}{2}$，此时，

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx = \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\iint_{\sigma zx} Q(x,y(z,x),z)d\sigma.$$

计算 $\iint\limits_{\sum} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$

（1）若 $\sum: z = z(x,y)$ $\quad (x,y)\leftarrow \sigma xy$ 且 γ 为锐角

设 $F(x,y,z) = z - z(x,y) = 0$，$\vec{n} = \pm\left\{-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right\}$

$$\overrightarrow{n^0} = \pm\left\{-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}}, -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}}\right\}$$

由 γ 为锐角，知 $\cos\gamma > 0$，故前面取“+”号，有 $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}}$，

$\cos\alpha = -\frac{\partial z}{\partial x}\cos\gamma$，$\cos\beta = -\frac{\partial z}{\partial x}\cos\gamma$

原式= $\iint\limits_{\sum} \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right]ds$

$$= \iint\limits_{\sum} \left[P(x,y,z)(-\frac{\partial z}{\partial x})\cos\gamma + Q(x,y,z)(-\frac{\partial z}{\partial y})\cos\gamma + R(x,y,z)\cos\gamma\right]ds$$

$$= \iint\limits_{\sum} \left[P(x,y,z)(-\frac{\partial z}{\partial x}) + Q(x,y,z)(-\frac{\partial z}{\partial y}) + R(x,y,z)\right]dxdy$$

$$= \iint\limits_{\sigma xy}\left[P(x,y,z(x,y))(-\frac{\partial z}{\partial x}) + Q(x,y,z(x,y))(-\frac{\partial z}{\partial y}) + R(x,y,z(x,y))\right]d\sigma$$

若 γ 为钝角，同理可知二重积分前面取“－”号.

（2）若 $\sum: x = x(y,z)$ $\quad (y,z)\leftarrow \sigma yz$ 且 α 为锐角，则

$$\iint_{\sum} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

$$= \iint_{\sigma yz}\left[P(x,y,x(y,z)) + Q(x,y,x(y,z))(-\frac{\partial x}{\partial y}) + R(x,y,x(y,z)(-\frac{\partial x}{\partial z}) \right] d\sigma$$

若 α 为钝角，同理可知二重积分前面取“ — ”号.

（3）若 $\sum : y = y(x,z)$　　$(x,z) \leftarrow \sigma xz$ 且 β 为锐角，则

$$\iint_{\sum} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

$$= \iint_{\sigma xz}\left[P(x,y,y(x,z))(-\frac{\partial y}{\partial x}) + Q(x,y,y(x,z)) + R(x,y,y(x,z)(-\frac{\partial y}{\partial z}) \right] d\sigma$$

若 β 为钝角，同理可知二重积分前面取“ — ”号.

定理 6.6（高斯（Gauss）公式）　设空间区域 V 由分片光滑的闭曲面 S 围成，若函数 P,Q,R 在 V 上具有连续的一阶偏导数，则 $\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$，其中 S 取外侧。

注 :以上关于不论是第二类曲线积分或第二类曲面积分的定理都要求 P,Q,R 具有连续的一阶偏导数，这一条件要引起大家的重视。

推论 6.6.1　若在封闭曲面 S 所包围的区域 V 中处处有 $div\vec{A} = 0$，则 $\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0.$

推论 6.6.2　如果仅在区域 V 中某些点（或子区域上） $div\vec{A} \neq 0$ 或 $div\vec{A}$ 不存在，其它点都有 $div\vec{A} = 0$，则通过包围这些点或子区域（称为洞）的 V 内任一封闭曲面积分（物理意义为流量）都是相等的，即 $\oiint_{S_1} \vec{A} \cdot \vec{n}^0 ds = \oiint_{S_2} \vec{A} \cdot \vec{n}^0 ds$。其中 S_1，S_2 是包围之同的任何两个封闭曲面，且法方向沿同侧。

类型 1.1 平面第二类曲线积分计算

解题策略 1．$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 其中 L 是平面上简单封闭曲线。

（1）若能找到一个单连通区域 D，使 $L \subset D$，而 P，Q 在 D 上具有连续的一阶偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, (x,y) \in D$，由平面曲线积分与路径无关性知 $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$

（2）若 L 包围的区域为 σ, P, Q 在 σ 上具有连续的一阶偏导，但 $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$ 此时可用格

林公式，有$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\pm\iint_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$.当 L 沿正向，取“+”号，沿负向取“—”号。

（3）若 L 包围的区域 σ 有洞，在这些洞上，P,Q 或者偏导数不连续或者 $\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$，但在其余点，$P,Q$ 具有连续的偏导数且 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，此时可找一简单封闭曲线 L_1 与 L 环绕同一些洞且方向一致则由前面给出的复连通区域上的定理知 $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{L_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.而 L_1 容易化成参数方程且转化成一元函数定积分后，容易计算。

（4）若 L 容易化成参数方程且转化成一元函数定积分后，容易计算，也可直接化成一元函数积分。

2．$\int_{\Gamma_{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.其中 Γ_{AB} 是非封闭的平面曲线，起点 $A(x_0,y_0)$，终点 $B(x_1,y_1)$。

（1）若能找到一个单连通区域 D，使 $\Gamma_{AB}\subset D$，P,Q 在 D 上具有连续的一阶偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，该曲线积分与路径无关，则

$$\int_{\Gamma_{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)dy.$$

（2）若 P,Q 偏导数连续，但 $\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y},(x,y)\in\Gamma_{AB}$，且 Γ_{AB} 化成参数比较方程困难或者化成参数方程转化一元函数定积分很难计算，且加一个简单曲线（比如直线段）构成封闭曲线，则可加一个简单曲线 L，减一个简单曲线 L，即原式

$$\oint_{\Gamma_{AB}+L}Pdx+Qdy-\int_L Pdx+Qdy=\pm\iint_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\int_L Pdx+Qdy$$

而二重积分与在 L 上的第二曲线积分都容易计算。（二重积分前的“$\pm$”号，由曲线 $\Gamma_{AB}+L$ 方向确定）

（3）若 Γ_{AB} 容易化成参数方程，且第二类曲线积分转化为一元函数定积分以后容易计算，也可直接转化。

3．第二类曲线积分有时也可转化为第一类曲线积分，利用第一类曲线积分来计算。

4．第二类曲线积分的牛顿—莱布尼兹公式

若 $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，则

$$\int_{\Gamma_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x_1,y_1)} du(x,y)=u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0).$$

以上方法请大家灵活使用。

类型 1.2 求原函数

解题策略 1．在一元函数里，若 $f(x)$ 连续，则 $f(x)$ 必有原函数，在二元函数里，即使 $P(x,y),Q(x,y)$ 连续，$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 也不一定存在 $u(x,y)$，使 $du=Pdx+Qdy.$ 若 P,Q 在单连通区域 D 上具有连续的一阶偏导，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y},(x,y)\in D$，则 $u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C$，使 $du=Pdx+Qdy.$ 即 $\frac{\partial u}{\partial x}=P,\frac{\partial u}{\partial y}=Q$，其中 $(x_0,y_0)\in D$（定点）

2．同理　若 P，Q，R 在空间某线单连通区域 V 上具有连续的一阶偏导数，且 $rot\vec{A}\equiv 0,(x,y,z)\in V$，则 $u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz+c$，使 $du=Pdx+Qdy+Rdz$，即 $\frac{\partial u}{\partial x}=P,\frac{\partial u}{\partial y}=Q,\frac{\partial u}{\partial z}=R.$ 其中 $(x_0,y_0,z_0)\in V.$

类型 1.3 求平面区域的面积

解题策略 利用平面封闭曲线上的第二类曲线积分计算平面图形的面积：在格林公式中，令 $P=-y,Q=x,$ 有 $\oint_{\Gamma} -ydx+xdy=\iint_{D}[1-(-1)]dxdy=2S$，因此 $S=\frac{1}{2}\int_{\Gamma} -ydx+xdy.$ 其中 Γ 是有界闭区域 D 的边界，沿正向.

类型 1.4 求 P,Q 中含有待求的字母常数

解题策略 若曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 与路径无关，P,Q 中含有待求的字母常数，且 P,Q 具有连续的偏导数，由曲线积分与路径无关的四个等价条件知 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，从中求出待求字母常数。

类型 1.5 求第二类曲面积分

解题策略 1．$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$

（1）若 P，Q，R 在 $\sum$ 包围的立体区域 V 具有连续的一阶偏导数，则 $\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iiint_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$，曲面沿外侧取“+”号，曲面沿

内侧取“ - ”号。要求右边三重积分容易计算。

(2) 若曲面 $\sum$ 包围的立体 V 内有洞，而在洞外面，P, Q, R 具有连续偏导数，且 $div\vec{A} \equiv 0$，$\left(\vec{A} = \{P, Q, R\}\right)$，利用推论 2 转化为与 $\sum$ 包含同一些洞的曲面 $\sum_1$ 上的第二类曲面积分，而且沿同一侧方向，即 $\iint\limits_{\sum} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\sum_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$，

要求 $\sum_1$ 是简单的曲面，且右边或者直接计算或者化成第一类曲面积分计算。

(3) 若曲面 $\sum$ 本身也比较简单，也可直接计算或者化成第一类曲面积分计算。

2. $\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$，其中 S 是非封闭的光滑曲面。

(1) 若直接计算比较困难，而加一个简单曲面 S_1 构成封闭曲面，且符合高斯定理条件，则

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{S+S_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy - \iint\limits_{S_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \pm\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv - \iint\limits_{S_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

“ ± ”由曲面法线方向的侧确定，要求右边的三重积分容易计算，后面一项第二类曲面积分直接容易计算。

(2) 也可直接计算或转化为第一类曲面积分来计算

类型 1.6 求空间第二类曲线积分

解题策略 1. $\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$，其中 L 为空间简单封闭曲线。

(1) 若找到一个线单连通区域 V，使 $L \subset V, P, Q, R$ 在 V 上具有连续的一阶偏导数，且 $rot\vec{A} = 0, (x,y,z) \in V\left(\vec{A} = \{P,Q,R\}\right)$ 则由曲线积分与路径无关性知 $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$

(2) 若 P, Q, R 偏导数连续，但 $rot\vec{A} \neq 0, (x,y,z) \in L.$ 可找一个以 L 为边界曲线的简单曲面 $\sum$，由斯托克斯公式知 $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\sum} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial z}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$ 要求第二类曲面积分容易计算。

(3) 若 L 容易化成参数方程，且第二类曲线积分化成一元函数定积分后容易计算，也可直接计算。

2. $\int_{\Gamma_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$，其中 Γ_{AB} 为空间曲线，起点

$A(x_0, y_0, z_0)$，终点 $B(x_1, y_1, z_1)$.

（1）若找到一个线单连通区域 V，使 $\Gamma_{AB} \subset V, P, Q, R$ 在 V 具有连续的一阶偏导数，且 $rot\vec{A} \equiv 0, (x, y, z) \in V$ ，则该积分与路径无关，则

$$\int_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z_1} (x_1, y_1, z)dz.$$

（2）若该积分与路径有关，但 Γ_{AB} 容易化成参数方程，且转化为一元函数定积分后容易计算，可直接计算。

3．第二类曲线积分的牛顿一莱布尼兹公式

若 $du(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$, 则

$$\int_{\Gamma_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{A(x_0, y_0, z_0)}^{B(x_1, y_1, z_1)} du(x, y, z) = u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0).$$

以上方法请大家灵活使用。

大纲要求

了解傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理.
会将定义在[-L，L]上的函数展开为傅里叶级数，将定义在[0，L]上的函数展开为正弦级数与余弦级数，写出傅里叶级数的和的表达式.

内容精要

（一） 基本概念

函数的傅里叶展开

标准区间$[-l,l]$上的三角函数系：

$1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\cdots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\cdots$ 具正交性。即成立：不同两个函数乘积在$[-l,l]$上的积分为零，而自身平方在$[-l,l]$上的积分不为零.

定理 7.12 （狄利克雷（Dirichlet）定理）如果 $f(x)$ 是以 $T=2l$ 为周期的周期函数，而且 $f(x)$ 在$[-l,l]$上分段光滑，那么 $f(x)$ 的 Fourier 级数在任意点 x 处都收敛，并且收敛于 $f(x)$ 在该点左、右极限的平均值，即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})=s(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},x\in(-\infty,+\infty),$$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,n=0,1,2,\cdots;\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,3,\cdots.$

1．将周期 $T=2l$ 且知道一个周期区间$[-l,l]$上表达式 $f(x)$ 展成傅氏级数的步骤：

（1）确定 $f(x)$ 的周期 $T=2l$ ；

（2）计算 $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,3,\cdots$

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,3,\cdots.$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶系数，若 $f(x)$ 为偶函数，由 $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ 为奇函数，则 $b_n=0,n=1,2,\cdots,$ 若 $f(x)$ 为奇函数，知 $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ 为奇函数，则 $a_0=0,a_n=0,n=1,2,\cdots$ ；

（3）写出 $f(x)$ 的傅里叶级数，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l});$

（4）

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})=s(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(-\infty,+\infty),\ f(x)\text{在}x\text{处连续}\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\in(-\infty,+\infty),\ f(x)\text{在}x\text{处不连续}\end{cases}$$

特别在 $x=\pm l+2kl$ 处$(k\in z)$，傅氏级数和为 $\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

注：s(x)是 周期函数，周期 $T=2l$.

2．将定义 $[-l,l]$ 上的函数 $f(x)$ 展成傅里叶级数的步骤：

（1）计算 $a_0=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$ ， $a_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,3,\cdots,$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,3,\cdots.$$

同样，若 $f(x)$ 为奇函数知 $a_0=0,a_n=0,n=1,2,3,\cdots$ 若 $f(x)$ 为偶函数，知

$b_n=0,n=1,2,3,\cdots$；

（2）傅氏级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})=s(x)=\begin{cases}f(x),x\in(-l,l),\text{且}f(x)\text{连续},\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\ x\in(-l,l)\text{且}f(x)\text{不连续}\end{cases}$$

在 $x=\pm l$ 处，傅氏级数的和为 $s(\pm l)=\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$

注：1.傅氏级数在某点收敛，与 $f(x)$ 在该点是否有定义没关系．2.s(x)是 周期函数，周期 $T=2l$.

当 $x\in(2kl-l,2kl+l)$ 时， $x-2kl\in(-l,l)$ ，则

$$s(x)=s(x-2kl)=\frac{f(x-2kl-0)+f(x-2kl+0)}{2},$$

$$s(2kl\pm l)=\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}.$$

3．将定义在 $(0,l)$ 上的函数展成正弦级数的步骤：

（1）计算 $b_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,3,\cdots,$ 而 $a_n=0,n=0,1,2,3,\cdots$；

（2）正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}=\begin{cases}f(x), & x\in(0,l)\text{且}f(x)\text{连续},\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\in(0,l),\text{且}f(x)\text{不连续。}\end{cases}$

$s(0)=s(l)=0$.

注： s(x)是奇函数、 周期函数，周期$T=2l$

当$x\in(-l,0)$时，有$-x\in(0,l)$， $s(x)=-s(-x)=-\dfrac{f(-x+0)+f(x-0)}{2}$

当$x\in(2kl-l,2kl+l)$时， $x-2kl\in(-l,l)$，则 $s(x)=s(x-2kl)$.

4．将定义在$(0,l)$上的函数展成余弦级数的步骤：

（1）计算$a_0=\dfrac{2}{l}\int_0^{\tau}f(x)dx$， $a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^{\tau}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx;\ n=1,2,3,\cdots$，

而$b_n=0,n=1,2,3,\cdots$；

（2）余弦级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=s(x)=\begin{cases}f(x),x\in(0,l)\text{ 且}f(x)\text{连续},\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2},x\in(0,l)\text{ 且}f(x)\text{不连续}.\end{cases}$$

$s(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$; $s(l)=\lim\limits_{x\to l'}f(x)$.

注： s(x)是偶函数、 周期函数，周期$T=2l$

当$x\in(-l,0)$时，有$-x\in(0,l)$， $s(x)=s(-x)=\dfrac{f(-x+0)+f(x-0)}{2}$

当$x\in(2kl-l,2kl+l)$时， $x-2kl\in(-l,l)$，则 $s(x)=s(x-2kl)$.